# BAREM DE CORECTARE

etapa locală - 22 februarie 2015

## Clasa a IX- a

## SUBIECTUL I

a) Inegalitatea este echivalentă cu $\frac{(ab+1)^2}{ab} \le \frac{(a^2+1)(b^2+1)}{ab}$ ..... $(1p)$

$\Leftrightarrow a^2b^2+2ab+1 \le a^2b^2+a^2+b^2+1 \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0$ (adevărat)..... $(2p)$

b) Observaţia $\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{n} b_k$ ..... $(1p)$

Inegalitatea este echivalentă cu $\prod_{k=1}^{n}(a_kb_k+1) \le \prod_{k=1}^{n}(a_k^2+1)$ ..... $(1p)$

Analog ca la pct. *a)* se obţine $(a_kb_k+1)^2 \le (a_k^2+1)(b_k^2+1)$ ..... $(1p)$

Înmulţirea inegalităţilor anterioare şi finalizare utilizând $\prod_{k=1}^{n}(b_k^2+1) = \prod_{k=1}^{n}(a_k^2+1)$ ..... $(1p)$

## SUBIECTUL II

a) Pentru $n=1$ în relaţia de recurenţă se obţine $\sqrt{a_2^2-33} = 2+\sqrt{a_1^2-34} = 2 \Rightarrow a_2^2-33=4$

$\Rightarrow a_2 = \sqrt{37} = \sqrt{2^2+33}$ şi analog, pentru $n=2$ se obţine $\Rightarrow a_3 = \sqrt{42} = \sqrt{3^2+33}$ ..... $(2p)$

b) Demonstrăm prin inducţie matematică $P(n): a_n = \sqrt{n^2+33}$

$P(1): a_1 = \sqrt{1^2+33}$ (adevărat)..... $(1p)$

Presupunem că $a_n = \sqrt{n^2+33}$ . Din relaţia de recurenţă deducem $\sqrt{a_{n+1}^2-33} = 2+\sqrt{n^2+33-2n-32}$

$\Rightarrow \sqrt{a_{n+1}^2-33} = n+1 \Rightarrow a_{n+1}^2-33 = (n+1)^2 \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{(n+1)^2+33}$ ..... $(2p)$

c) Avem $a_{19} = \sqrt{394} \in 19,84$ , $x_{19} = \left[\frac{40000}{\sqrt{394}}\right]$ şi $19,84 < \sqrt{394} < 19,85 \Rightarrow \frac{40000}{19,85} < \frac{40000}{\sqrt{394}} < \frac{40000}{19,84}$

$\Rightarrow 2015 < \frac{40000}{\sqrt{394}} < 2016 \Rightarrow x_{19} = 2015$ ..... $(1p)$

d) $x_n = 2015 \Leftrightarrow 2015 \le \frac{40000}{\sqrt{n^2+33}} < 2016 \Leftrightarrow \frac{40000}{2016} < \sqrt{n^2+33} \le \frac{40000}{2015} \Leftrightarrow 393 < n^2+33 \le 394 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2+33 = 394 \Leftrightarrow n = 19$ ..... $(1p)$

## SUBIECTUL III (vezi fig.1)

Considerăm $\frac{AM}{AB} = x$ şi $\frac{AN}{AC} = y$ .

"$\Rightarrow$" Notăm $P$ punctul de concurenţă al celor trei drepte şi aplicând teorema lui Menelaus în $\triangle ABE$ şi $\triangle ACE$ cu punctele coliniare $M-D-P$ respectiv $N-F-P$ se obţine

$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BD}{DE}\cdot\frac{EP}{PA} = \frac{AN}{NC}\cdot\frac{CF}{FE}\cdot\frac{EP}{PA} = 1$ ..... $(2p)$

Deci $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ de unde $x = y$ ..... $(1p)$

Dacă prin absurd $x = \frac{1}{2}$ atunci $M$ este mijlocul lui $(AB)$ iar dreptele $MD$, $AE$ şi $NF$ se obţin

ISJ BOTOŞANI

paralele, fals ..... $(1p)$

"$\Leftarrow$" $x = y \neq \frac{1}{2}$, deci dreptele *MD* şi *NF* intersectează dreapta *AE* în *P* respectiv *T*, puncte care se află în exteriorul segmentului $(AE)$ ..... $(1p)$

Folosind teorema lui Menelaus în aceleaşi triunghiuri, obţinem $\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BD}{DE}\cdot\frac{EP}{PA}=\frac{AN}{NC}\cdot\frac{CF}{FE}\cdot\frac{ET}{TA}=1$

$\Rightarrow \frac{EP}{PA}=\frac{ET}{TA}\Rightarrow T=P$ ..... $(2p)$

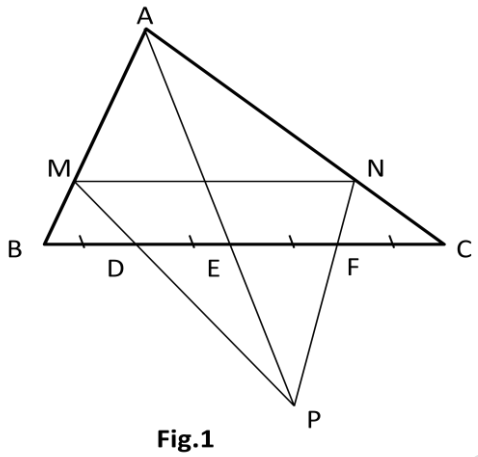


**Fig.1**

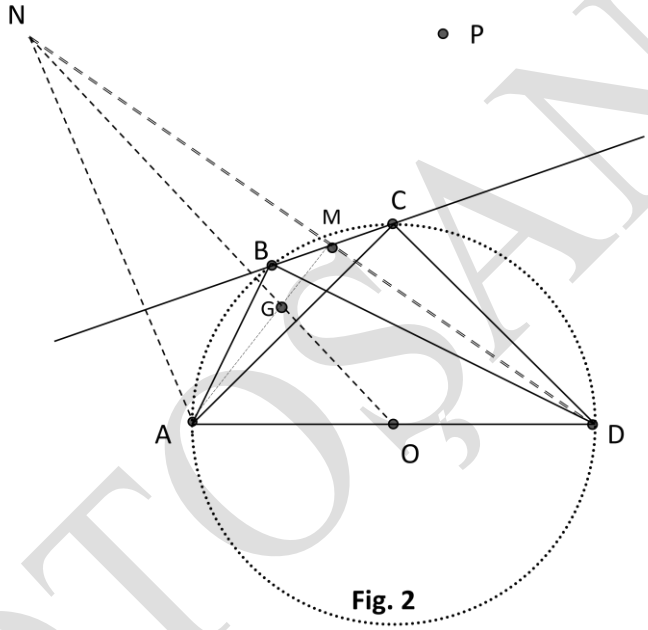


**Fig. 2**

**<u>SUBIECTUL IV</u>** (Vezi fig. 2)

a) Notăm cu *M* mijlocul segmentului $(BC)$ şi cum *G* este centrul de greutate al triunghiului *ABC* obţinem $\frac{MG}{GA}=\frac{1}{2}$. Punctele *A, B, C* şi *D* se află pe cercul de centru *O* şi rază *OA* deci $OM \perp BC$ $\Rightarrow OM \parallel AN$ ..... $(1p)$

Teorema lui Thales $\Rightarrow$ $\frac{OG}{GN}=\frac{MG}{GA}=\frac{1}{2}$ şi cum *NO* este mediană în $\triangle NAD \Rightarrow G$ este centru de greutate şi în $\triangle NAD$ ..... $(1p)$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OD} \Rightarrow \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OD}$ ..... $(1p)$

<u>Variantă</u>: Se arată că *M* este şi mijlocul lui $(ND)$ (de exemplu cu reciproca teoremei liniei mijlocii) şi se utilizează vectorul de poziţie al mijlocului unui segment (*NCDB* este paralelogram).

b) Din relaţia de la *a)* $\Rightarrow$ $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}$ şi cum *O* este centrul cercului circumscris triunghiului *ABC* $\Rightarrow$ (Relaţia lui Sylvester) *N* este ortocentru în $\triangle ABC$ ..... $(2p)$

c) $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\Rightarrow \overrightarrow{NP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AD}\Rightarrow NPDA$ paralelogram..... $(2p)$

Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.

ISJ BOTOŞANI